УДК 658.512.2.012.122

КВАДРАТИЧНЫЕ ИНВОЛЮЦИИ ПЛОСКОСТИ КАК БАЗОВЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ КРИВЫХ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ

И.Ф. Боровиков, Е.Г. Фисоченко

Юргинский технологический институт ТПУ
E-mail: bif1986@mail.ru

Предлагается способ задания нецентральных квадратичных инволюций плоскости, основанный на использовании пучков окружностей, выводятся операторы преобразования, приводятся примеры рациональных циркулярных кривых, конструируемых с использованием данного способа.

Конструирование технических кривых (всевозможные аэро- и гидродинамические профили, оси трубопроводов, шпангоуты, линии-параметроносители) сводится к построению кривых, сопрягающих точки заданного дискретного массива с выполнением некоторого набора краевых условий (фиксированные касательные, круги кривизны и т. д.). В свою очередь, технические поверхности (различные зализы, воздухозаборники, лонжероны, лопатки турбин) можно трактовать как поверхности, сопрягающие по определенному порядку гладкости исходные кривые. В настоящее время технические кривые в большинстве случаев представляются в виде составных обводов определенного порядка гладкости. Несмотря на то, что при этом используется большая номенклатура функций (показательные, степеннные, логарифмические и др.), составляющие обводов зачастую выбираются без необходимого геометрического обоснования. В результате этого обвод не отвечает своему функциональному назначению, а число составляющих является завышенным. Кроме того, в различных расчетах важно иметь кривые, которые описываются одним уравнением. Поэтому поиск базового метода получения кривых в системах автоматизированного конструирования, который был бы достаточно универсальным и простым, остается актуальным.

При конструировании кривых целесообразно использовать нелинейные преобразования [1, 2]. Причем желательно, чтобы аппарат преобразования включал в себя простые геометрические образы, например, прямые и окружности. В этом плане интерес могут представлять предлагаемые квадратичные преобразования, для задания которых используются пучки окружностей.

Пусть на плоскости задан эллиптический пучок окружностей двумя базисными точками $F_1(0,a)$, $F_2(0,-a)$ (рис. 1). Тогда произвольная точка $A(x_A,y_A)$ выделяет из пучка единственную окружность k, уравнение которой имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2 & 0 & a & 1 \\ a^2 & 0 & -a & 1 \\ x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразования получаем:

$$\left(x+\frac{a^2-x_A^2-y_A^2}{2x_A}\right)^2+y^2=a^2+\frac{(a^2-x_A^2-y_A^2)^2}{4x_A^2}.$$

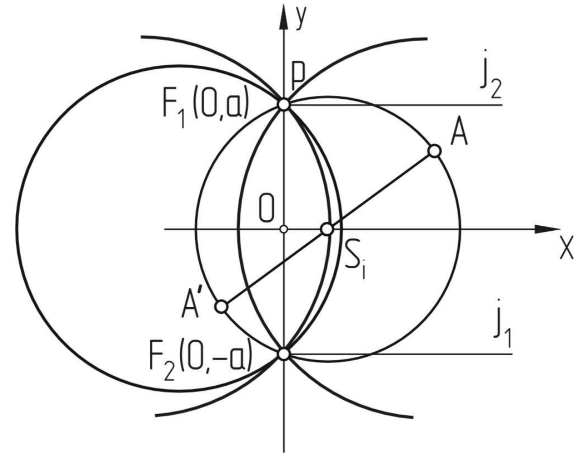


Рис. 1. *Задание инволюции с помощью эллиптического пучка окружностей*

Центром окружности является точка

$$S_i\left(\frac{x_A^2+y_A^2-a^2}{2x_A},\,0\right),$$

ее радиус определяется выражением

$$R_i=\sqrt{a^2+\frac{(a^2-x_A^2-y_A^2)^2}{4x_A^2}}.$$

Диаметрально противоположную точку $A'(x_A',y_A')$ будем считать соответственной точке A. Таким образом, на плоскости индуцируется нелинейное преобразование, расслаивающееся в пучке окружностей на центральные симметрии. Нетрудно показать, что координаты точки A' определяются выражениями:

$$x_A'=\frac{y_A^2-a^2}{x_A},\quad y_A'=-y_A.$$

Так как в качестве точки-прообраза A может быть выбрана любая точка плоскости, то индексы в последних выражениях можно опустить. В результате этого получаем операторы прямого преобразования:

$$x'=\frac{y^2-a^2}{x},\quad y'=-y.$$

Рис. 2. *Различные формы кривых для эллиптического пучка окружностей*

Операторы обратного преобразования имеют симметричный вид.

Образом прямой m', описываемой уравнением $Ax'+Bx'+1=0$, будет являться кривая второго порядка m, уравнение которой имеет вид: $Ay^2-Bxy+x-Aa=0$. Таким образом, получаем квадратичную инволюцию с пучком слабоинвариантных окружностей. Точки F_1, F_2 являются простыми F-точками. Им соответствуют p-прямые, уравнения которых имеют вид: $y=a$, $y=-a$. Предельной прямой является ось Oy. Уже на стадии задания прообраза можно иметь представление о форме конструируемой кривой. Так, например, кратность точек кривой в фундаментальных F-точках определяется количеством точек пересечения прообраза с p-прямыми, наличие несобственных точек – расположением прообраза относительно предельной прямой. Если в качестве прообраза взять окружность, то ее образом будет являться кривая четвертого порядка, уравнение которой имеет вид:

$$y^4+y^2x^2-2x_0xy^2+2y_0yx^2-2a^2y^2+$$
$$+y_0^2x^2-R^2x^2+x_0^2x^2+2a^2x_0x+a^4=0,$$

где x_0, y_0 – координаты центра окружности, R_0 – радиус окружности.

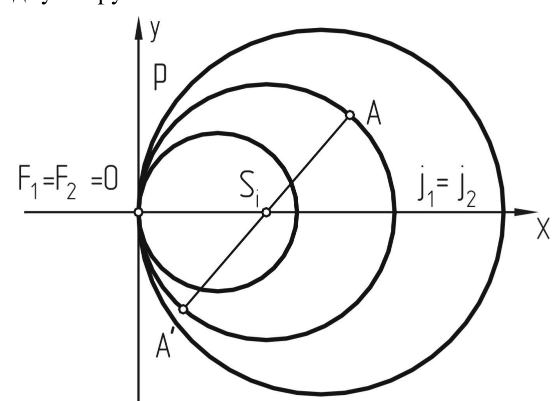


Рис. 3. *Задание инволюции с помощью параболического пучка окружностей*

В однородной форме его можно представить следующим образом:

$$x_2^4+x_1^2x_2^2-2x_0x_1x_2^2x_3+2y_0x_2x_1^2x_3-2a^2x_2^2x_3^2+$$
$$+y_0^2x_1^2x_3^2-R^2x_1^2x_3^2+x_0^2x_1^2x_3^2+2a^2x_0x_1x_3^3+a^4x_3^4=0.$$

Координаты циклических точек $I_1(1,i,0)$, $I_2(1,-i,0)$ удовлетворяют этому уравнению, следовательно, полученная кривая является циркулярной кривой. Причем форма кривой зависит от положения образа относительно фундаментальных точек, принципиальных кривых и предельной прямой (рис. 2).

В случае параболического пучка окружностей, когда a=0 (рис. 3), операторы преобразования имеют вид:

$$x' = \frac{y^2}{x}, \quad y' = -y.$$

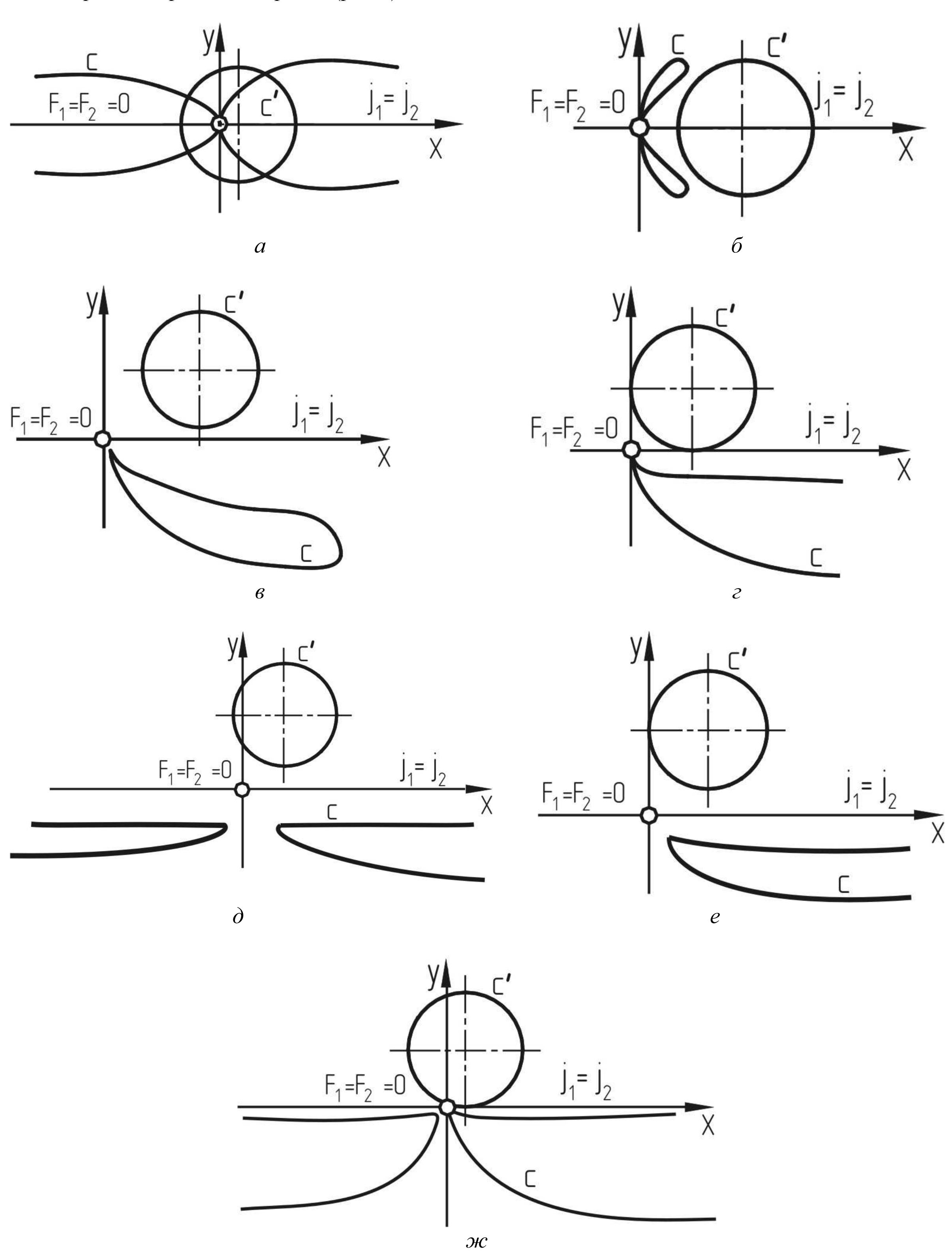


Рис. 4. *Различные формы кривых для параболического пучка окружностей*

Все гомолоиды в этом случае в точке $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$ касаются оси *Oy*. Обе принципиальные *p*-прямые совпадают с осью *Ox*. Образами окружностей, имеющих уравнение $(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2=R^2$, являются кривые четвертого порядка. Они описываются уравнением:

$$y^4 + y^2x^2 - 2x_0xy^2 + 2y_0yx^2 + y_0^2x^2 - R^2x^2 + x_0^2x^2 = 0$$

или в однородной форме:

$$x_2^4 + x_1^2x_2^2 - 2x_0x_1x_2^2x_3 + 2y_0x_2x_1^2x_3 + \\ + y_0^2x_1^2x_3^2 - R^2x_1^2x_3^2 + x_0^2x_1^2x_3^2 = 0.$$

Возможные формы кривых в зависимости от положения окружности-прообраза относительно элементов фундаментальной и принципиальной систем, а также оси *Oy*, являющейся предельной прямой, представлены на рис. 4.

Рассмотрим преобразования, индуцированные гиперболическим пучком окружностей (рис. 5).

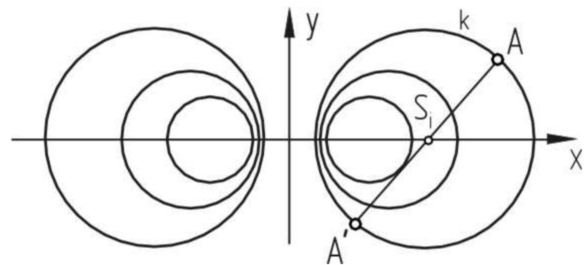
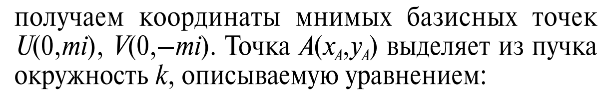


Рис. 5. *Задание инволюции с помощью гиперболического пучка окружностей*

Такой пучок удобно задать нулевой окружностью $N(m,0)$ и радикальной осью, в качестве которой принимаем ось *Oy*. Решая систему уравнений

$$\left\{\begin{matrix} (x-m)^2 + y^2 = 0, \\ x = 0 \end{matrix}\right\},$$

получаем координаты мнимых базисных точек $U(0,mi)$, $V(0,-mi)$. Точка $A(x_A,y_A)$ выделяет из пучка окружность *k*, описываемую уравнением:



$$\left(x - \frac{x_A^2 + y_A^2 + m^2}{2x_A}\right)^2 + y^2 = \frac{(x_A^2 + y_A^2 + m^2)^2}{4x_A^2} - m^2.$$

Точку $A'(x'_A, y'_A)$, диаметрально противоположную точке *A*, будем считать образом точки *A* в нелинейной инволюции, индуцируемой на плоскости. Используя операторы преобразования для эллиптического пучка при $a=mi$, получаем операторы преобразования для рассматриваемого случая:

$$x' = \frac{y^2 + m^2}{x},$$
$$y' = -y.$$

Прообразом окружности с уравнением $(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2=R^2$ является кривая четвертого порядка:

$$y^4 + y^2x^2 - 2x_0xy^2 + 2y_0yx^2 + 2m^2y^2 + \\ +(y_0^2 - R^2 + x_0^2)x^2 + 2m^2x_0x - m^4 = 0.$$

В однородном виде уравнение имеет вид:

$$x_2^4 + x_1^2x_2^2 - 2x_0x_1x_2^2x_3 + 2y_0x_2x_1^2x_3 + 2m^2x_2^2x_3^2 + \\ +(y_0^2x_3^2 - R^2x_3^2 + x_0^2x_3^2)x_1^2 + 2m^2x_0x_1x_3^3 - m^4x_3^4 = 0.$$

Это рациональная циркулярная кривая, различные формы которой представлены на рис. 6.

Предлагаемый способ позволяет конструировать кривые в широком диапазоне изменения форм и параметров. Уже на стадии задания прообраза можно иметь представление о форме конструируемой кривой. Так, например, кратность точек кривой в фундаментальных *F*-точках определяется количеством точек пересечения прообраза с *p*-пря-

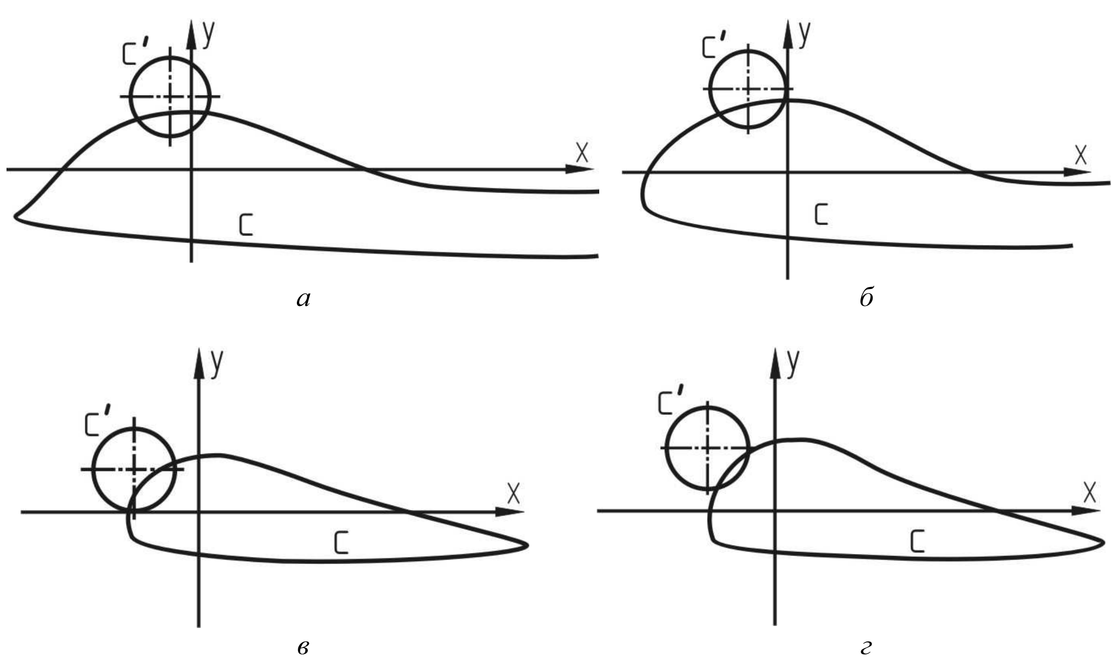


Рис. 6. *Различные формы кривых для параболического пучка окружностей*

мыми, наличие несобственных точек – расположением прообраза относительно предельной прямой. Для того, чтобы конструируемая кривая была замкнутой, необходимо, чтобы окружность-прообраз не пересекала предельную прямую.

Для использования данного способа в практике реального конструирования на алгоритмическом языке Турбо Паскаль разработана программа, которая позволяет строить кривые, отвечающие наперед заданным требованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований). – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.
2. Sturm R. Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. – Leipzig und Berlin: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1908. – Bd. 4. – 484 S.

Поступила 02.06.2006 г.

УДК 629.11.012(075.8)